Instituto de Matemática
Campus Curicó
19/11/2018

Prueba N°2
Álgebra Lineal

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[20 ptos]** Considere las rectas de ecuaciones

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 4 + t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}_2 : \frac{x+1}{12} = \frac{y-7}{6} = \frac{z-5}{3}$$

a) **[10 ptos.]** Encuentre el punto de intersección entre las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

b) **[10 ptos.]** Encuentre el plano Π que contiene a las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

2) **[25 ptos]** Sean $U = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ a - b + 2c = 0, \ a + b - c = 0\}$ y $W = \langle 2x^2 + x - 3, x + 1 \rangle$ subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

a) **[10 ptos.]** Encuentre una base y la dimensión de U.

b) **[10 ptos.]** Encuentre la dimensión de $U + W$.

c) **[5 ptos.]** ¿Es $U \oplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?.

3) **[15 ptos]** Sea V el espacio vectorial de las matrices diagonales de orden dos con elementos reales, se tienen las bases:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si la matriz de cambio de base (transición), de la bases $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ es $[A]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Determine los valores de a y b. **(Justifique adecuadamente)**

Pauta de corrección:

1) *a*) Un punto $P=(x,y,z)\in\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}_2$ si existen parámetros t y s tales que:

$$\begin{array}{rcl} 3+4t & = & -1+12s \\ 4+t & = & 7+6s \\ 1 & = & 5+3s \end{array} \iff s=-\frac{4}{3}, \quad t=-5.$$

[4 + 3 pts]

. . . .

Ahora con $t=-5$ obtenemos el punto $P=(-17,-1,1)$ **[3 pts]**

. . . .

b) Para obtener la ecuación del plano Π que contiene las rectas dadas consideremos los puntos $P=(-17,-1,1)$, $Q=(3,4,1)\in\mathcal{L}_1$ y $R=(-1,7,5)\in\mathcal{L}_2$. Luego **[2 pts]**

$$\vec{n}=\vec{PQ}\times\vec{PR}=(20,5,0)\times(16,8,4)=(20,-80,80)$$

[3 pts]

. . . .

Entonces la ecuación del plano Π, queda:

$$(x-3,y-4,z-1)\cdot\vec{n}=0 \iff 20(x-3)-80(y-4)+80(z-1)=0 \iff x-4y+4z=-9$$

[5 pts]

. . . .

2) *a*) Observemos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c & = & 0 \\ a+b-c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} 3a+b & = & 0 \\ c & = & a+b \end{array}\right. \iff b=-3a,\ c=-2a$$

[5 pts]

. . . .

Luego un polinomio $p(x)\in U$ si y sólo si es de la forma $p(x)=ax^2-3ax-2a,\ a\in\mathbb{R}$.

[3 pts]

. . . .

Así $\mathcal{B}_U=\{x^2-3x-2\}$ un conjunto generador de U y siendo el polinomio no nulo es una base también. Entonces $dim(U)=1$. **[2 pts]**

. . . .

b) Por definición de subespacio W está generado por el conjunto $\mathcal{B}_W = \{2x^2 + x - 3, x + 1\}$. Claramente los dos polinomios en $\mathcal{B}_W$ no son uno múltiplo del escalar de otro, luego $\mathcal{B}_W$ es una base de W. **[2 pts]**

. . . .

Por otro lado, un conjunto generador para $U + W$ es

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{x^2 - 3x - 2, 2x^2 + x - 3, x + 1\}$$

[2 pts]

. . . .

Mostremos que el conjunto $\mathcal{C}$ es l.i:

$$\alpha(x^2-3x-2)+\beta(2x^2+x-3)+\gamma(x+1) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 2\beta & = & 0 \\ -3\alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 \\ -2\alpha - 3\beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

[2 pts]

. . . .

Luego $\mathcal{C}$ es una base de $U + W$ y $dim(U + W) = 3$. Como tiene la misma dimensión del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que lo contiene, entonces $U + W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

[4 pts]

. . . .

c) Por la fŕmula de la dimensión, se tiene:

$$3 = dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 1 + 2 - 0$$

Luego $U \cap W = \{0\}$ y $U \oplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

[5 pts]

. . . .

3)

- Escribiendo $\mathcal{B}_2$ como una combinación lineal de $\mathcal{B}_1$, con sus respectivos coeficientes dados por $[A]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = (-1/2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 + b & 0 \\ 0 & -1/2 - b \end{bmatrix} \tag{2}$$

[5 + 5 pts]

. . . .

- Igualando coeficiente a coeficiente, obtenemos de (1): $a = 2$ y de (2): $b = \dfrac{3}{2}$. **[5 pts]**

. . . .